Tutorato 11 GE220

Docente: Massimiliano Pontecorvo. Esercitatore: Raffaele Carbone.
Tutori: Giovanni Passeri. Bruno Renzi.
Giovedì 24 maggio 2018.

Esercizio 1. *Sia X uno spazio topologico e $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento. Dimostrare le seguenti asserzioni.*

1. *p è un omeomorfismo locale.*
2. *Se X è di Hausdorff, $\tilde{X}$ è di Hausdorff.*
3. *Per ogni $x \in X$, $p^{-1}(x)$ è uno spazio topologico discreto (con la topologia di sottospazio).*
4. *Se $\tilde{X}$ è compatto, $p^{-1}(x)$ è finito per ogni $x \in X$.*

Esercizio 2. *Siano $p_1 : \tilde{X}_1 \to X_1$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X_2$ due rivestimenti. Mostrare che $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ definito da $(p_1 \times p_2)(x, y) = (p_1(x), p_2(y))$ è un rivestimento.*

Trovare un rivestimento universale del toro $\mathbb{T}^n$.

Esercizio 3. *Dire quali dei seguenti $p : \tilde{X} \to X$ è un rivestimento.*

1. *$X := \mathbb{R}^2$, $\tilde{X} := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = n\}$, $p : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.*
2. *$X := \mathbb{R}$, $\tilde{X} := \bigcup_{n\in\{1,2,3\}}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{n}\}$, $p : (x, y) \mapsto x$.*
3. *$X := \mathbb{R}$, $\tilde{X} := \{\frac{1}{s}(\cos s, \sin s) : s \in (0, +\infty)\}$, $p : (x, y) \mapsto x$.*
4. *$X := \mathbb{R}^2$, $\tilde{X} := \bigcup_{n\in\mathbb{Q}}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = n\}$, $p : (x, y, z) \mapsto (x, y)$.*

Esercizio 4. *Calcolare i gruppi fondamentali dei seguenti spazi topologici X.*

1. *$X := \partial B((0, 1, 0), 1) \cup B((0, -1, 0), 1) \subset \mathbb{R}^3$.*
2. *$\partial B(0, 1) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.*
3. *$(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \cup r)/\sim$ dove r è una retta di $\mathbb{R}^2$ e $\sim$ è una relazione che identifica un punto di r ed uno di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.*

Esercizio 5. *Consideriamo i sottospazi di $\mathbb{R}^2$*

$$X_1 := \{t(\cos t, \sin t) : t \in (1, 8\pi)\}$$

$$X_2 := \{t(\cos t, \sin t) : t \in (1, +\infty)\}$$

1. $p_1 : X_1 \to S^1$, $x \mapsto \frac{x}{||x||}$ *è un rivestimento universale?*

2. p_1 *è un rivestimento?*

3. $p_2 : X_2 \to S^1$, $x \mapsto \frac{x}{||x||}$ *è un rivestimento?*

4. p_2 *è un rivestimento universale?*

Esercizio 6. *Mostrare che non esistono applicazioni iniettive da* S^1 *in* $\mathbb{R}$.